



TITLE:

Copulaに基づく時間-周波数表現とその応用 (時間周波数解析の手法と理工学的応用)

AUTHOR(S):

吉田, 久; 吉川, 昭

CITATION:

吉田, 久 ...[et al]. Copulaに基づく時間-周波数表現とその応用 (時間周波数解析の手法と理工学的応用). 数理解析研究所講究録 2010, 1684: 1-12

ISSUE DATE:

2010-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141433>

RIGHT:

Copula に基づく時間-周波数表現とその応用

Positive Time-Frequency Distribution based on Copula Theory and Its Application

吉田 久, 吉川 昭
Hisashi Yoshida, Sho Kikkawa

近畿大学生物理工学部電子システム情報工学科
Department of Electronic Systems and Information Engineering,
Kinki University

1 正值時間-周波数分布

正值時間-周波数分布 [1, 2] とは、分布の値が非負であり、かつ周辺分布条件を満たす分布をいう。より詳しくいえば、信号 $x(t)$ の時間-周波数分布を $p(t, f)$ としたときに、

$$\begin{aligned} p(t, f) &\geq 0, & (\text{正值性}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(t, \tau) d\tau &= \mathcal{T}(t), & \int_{-\infty}^{\infty} p(\nu, f) d\nu = \mathcal{F}(f), & (\text{周辺分布条件}) \end{aligned} \quad (1)$$

を満たす分布ことである。ここで、 $\mathcal{T}(t) = |x(t)|^2$ は時間周辺分布であり、 $\mathcal{F}(f) = |X(f)|^2$ は周波数周辺分布である¹。例えば、スペクトログラムは非負の値を持つが、周辺分布条件を満たさないので、ここでいう正值時間-周波数分布ではない。

Cohen, Zapparovanny, そして Posh らは、このような正值時間-周波数分布が以下のように構成することができることを示した [1, 2]。

$$p(t, f) = \mathcal{T}(t)\mathcal{F}(f)\Omega(\mathbf{T}(t), \mathbf{F}(f)) \quad (2)$$

但し、

$$\mathbf{T}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{T}(t') dt', \quad \mathbf{F}(f) = \int_{-\infty}^f \mathcal{F}(f') df' \quad (3)$$

であり、信号 $x(t)$ は $E_x = \int |x(t)|^2 dt = 1$ と正規化されているものとする²。また Ω は以下の条件を満たす正值の関数であれば良い。

$$\int_0^1 \Omega(u, v) du = \int_0^1 \Omega(u, v) dv = 1 \quad (4)$$

¹ $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$

² 正規化されていない場合、式 (1) の右辺と式 (3) は、 E_x で割る必要がある

なお、 $u = \mathbf{T}(t)$, $v = \mathbf{F}(f)$ とおいた。カーネル関数 Ω によって特徴付けられる正値時間-周波数分布は、 Ω の選び方によって無数に存在する。問題は、どのようにして妥当な Ω を系統的に見つけだすかにある。実用的な構成方法として、吉川らは、2乗誤差が最小になる意味で Wigner-Ville 分布に最も近い正値時間-周波数分布を選び出す Ω の決定法を提案しており [3]、また Loughlin らは周辺分布条件を拘束条件として、スペクトログラムなどの事前分布とのクロスエントロピーが最小になるように直接的に正値時間-周波数分布を構成する方法を提案している [4]。これらの方法は、反復計算によって最適化する方法であり、計算コストが大きい。近年になり Copula 理論に基づく正値時間-周波数分布の構成法が提案された [5]。この方法は反復計算による最適化を必要としないものである。次節では、簡単に Copula 理論を概観し、Copula に基づく正値時間-周波数分布の構成方法について述べる。

2 Copula に基づく正値時間-周波数分布

2.1 Copula 理論

本節では Copula に関する基本的な定義と性質についていくつか述べる [6]。

定義 1 2次元 Copula \mathbf{C} は $[0, 1]^2$ から $[0, 1]$ への関数であり、次のような性質を持つ。

1. $\mathbf{C}(u, 0) = \mathbf{C}(0, v) = 0$ for all $(u, v) \in [0, 1]^2$;
2. $\mathbf{C}(u, 1) = u$ and $\mathbf{C}(1, v) = v$ for all $(u, v) \in [0, 1]^2$;
3. For all $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in [0, 1]^4$ such that $u_1 \leq u_2$ and $v_1 \leq v_2$,
 $\mathbf{C}(u_2, v_2) - \mathbf{C}(u_2, v_1) - \mathbf{C}(u_1, v_2) + \mathbf{C}(u_1, v_1) \geq 0$.

定理 1 (Sklar's theorem [7]) 累積結合分布 $\mathbf{P}(x, y)$ が、累積周辺分布 $\mathbf{X}(x)$ と $\mathbf{Y}(y)$ を持つとき、全ての $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対して、

$$\mathbf{P}(x, y) = \mathbf{C}(\mathbf{X}(x), \mathbf{Y}(y)). \quad (5)$$

となる Copula \mathbf{C} が存在する。 $\mathbf{X}(x)$ と $\mathbf{Y}(y)$ が連続の場合、 \mathbf{C} は一意であり、連続でない場合も、 \mathbf{C} Range $[\mathbf{X}(x)] \times$ Range $[\mathbf{Y}(y)]$ 上で一意に決定することができる。逆に、分布関数 $\mathbf{X}(x)$ と $\mathbf{Y}(y)$ があり、 \mathbf{C} が Copula であるならば、式 (5) で定義される $\mathbf{P}(x, y)$ は周辺分布 $\mathbf{X}(x)$ と $\mathbf{Y}(y)$ を持つ、結合分布となる。

定理 1 より、ある特定の周辺分布を持つ結合分布を調べるために Copula が使えることがわかるであろう。式 (5) の $\mathbf{P}(x, y)$ および $\mathbf{C}(u, v)$ の関係は周辺分布の準逆関数を用いて、逆に表現することもできる。

定義 2 \mathbf{Q} を分布関数とすると、準逆関数 $\mathbf{Q}^{(-1)}$ は

$$\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^{(-1)}(u)) = u, \text{ if } u \in \text{Range}[\mathbf{Q}] \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}^{(-1)}(u) = \inf\{x | \mathbf{Q}(x) \geq u\}, \text{ otherwise.} \quad (7)$$

である。

系 1 $P(x, y)$ は累積分布関数であり、累積周辺分布に $\mathbf{X}(x)$ と $\mathbf{Y}(y)$ を持つものとする。また $\mathbf{X}^{(-1)}(x)$ と $\mathbf{Y}^{(-1)}(y)$ は $\mathbf{X}(x)$ と $\mathbf{Y}(y)$ の準逆関数であるとし、 \mathbf{C} はこれらに関連づける Copula であるとする。このとき、

$$\mathbf{C}(u, v) = \mathbf{P} \left(\mathbf{X}^{(-1)}(x), \mathbf{Y}^{(-1)}(y) \right). \quad (8)$$

が成立する。

2.2 時間-周波数 Copula

Copula 理論を援用して、正值時間-周波数分布を構成する方法を述べる前に、Copula 理論と Cohen, Zaparovanny, Posh の正值時間-周波数分布の関係について簡単に述べておく。式 (2) の $p(t, f)$ の累積分布 $\mathbf{P}(t, f)$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t, f) &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^f p(\tau, \nu) d\tau d\nu \\ &= \Omega(\mathbf{T}(t), \mathbf{F}(f)) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで、

$$\Omega(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v \Omega(u', v') du' dv' \quad (10)$$

である。すなわち、Cohen, Zaparovanny, Posh の正值時間-周波数分布におけるカーネル関数 Ω は Copula そのものである。この事実から、正值時間-周波数分布、つまり正の値を持ち、周辺分布条件を満たす時間-周波数分布を構成するためには、

$$\mathbf{P}(t, f) = \mathbf{C}(\mathbf{T}(t), \mathbf{F}(f)). \quad (11)$$

とすればよい。ここで \mathbf{C} は任意の Copula である。しかし、多くの $\mathbf{C}(u, v)$ は信号 $x(t)$ の実際の時間-周波数分布に関する情報を持っていないために使いものにはならないだろう。どのようにして信号 $x(t)$ に依存した Copula を構成するかという問いに対して、反復による最適化を含まない方法を提案したのが Davy と Doucet である [5]。

Copula 理論に基づき、正值時間-周波数分布の構成する Davy と Doucet の方法とは次のようなものである。まず、 $S(t, f)$ を非定常過程 $x(t)$ をよく表現する正值時間-周波数分布とする。但し、周辺分布条件は満たしてなくてよい。時間-周波数分布およびその周辺分布の累積分布をそれぞれ $\mathbf{S}(t, f)$ 、 $\tilde{\mathbf{T}}(t)$ および $\tilde{\mathbf{F}}(f)$ とする。このとき、 $\mathbf{S}(t, f)$ の時間-周波数 Copula \mathbf{C}^S とは

$$\mathbf{C}^S(u, v) = \mathbf{S} \left(\tilde{\mathbf{T}}^{(-1)}(u), \tilde{\mathbf{F}}^{(-1)}(v) \right), \quad (12)$$

で定義される。但し、 $\tilde{\mathbf{T}}^{(-1)}(u)$ および $\tilde{\mathbf{F}}^{(-1)}(v)$ は、それぞれ $\tilde{\mathbf{T}}(t)$ と $\tilde{\mathbf{F}}(f)$ の逆関数である。このとき、非負かつ、周辺分布条件を満たす正值時間-周波数分布の累積分布 $\mathbf{P}(t, f)$ は

$$\mathbf{P}(t, f) = \mathbf{C}^S(\mathbf{T}(t), \mathbf{F}(f)), \quad (13)$$

と求めることができる。但し、 $\mathbf{T}(t)$ と $\mathbf{F}(f)$ はそれぞれ、信号 $x(t)$ の真の時間周辺分布と周波数周辺分布の累積分布である。テンプレート $\mathbf{S}(t, f)$ の典型的な例は、信号 $x(t)$ のスペクトログラムの累積分布である。スペクトログラムは信号 $x(t)$ の時間-周波数分布を正しく表現しているが、周辺分布条件は満たしていない。テンプレート $\mathbf{S}(t, f)$ は以下のよう定義される。

$$\mathbf{S}(t, f) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^f S_{\text{spec}}(t', f') df' dt' = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^f \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t' - \tau) e^{-j2\pi f' \tau} d\tau \right|^2 df' dt', \quad (14)$$

ここで、 $h(t)$ は窓関数である。 $\tilde{\mathbf{T}}(t)$ と $\tilde{\mathbf{F}}(f)$ は

$$\tilde{\mathbf{T}}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{spec}}(t', f) df dt' \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(f) = \int_{-\infty}^f \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{spec}}(t, f') dt df'. \quad (16)$$

として求められる。また、真の周辺分布である $\mathbf{T}(t)$ と $\mathbf{F}(f)$ は

$$\mathbf{T}(t) = \int_{-\infty}^t |x(t')|^2 dt', \quad (17)$$

$$\mathbf{F}(f) = \int_{-\infty}^f |X(f')|^2 df', \quad (18)$$

で与えられる。なお、 $X(f)$ は $x(t)$ のフーリエ変換である。最後に、求まった $\mathbf{P}(t, f)$ を変数 t ならびに f について偏微分することで正値時間-周波数分布 $P(t, f)$ を求めることができる。

$$P(t, f) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial f} \mathbf{P}(t, f). \quad (19)$$

2.3 確率過程における時間-周波数 Copula

信号 $x(t)$ が確率過程の場合は、テンプレート $\mathbf{S}(t, f)$ を各サンプル信号 $x_n(t)$ の平均スペクトログラム $\bar{S}_{\text{spec}}(t, f)$ とすればよい。すなわち、式 (14) を若干修正し、

$$S(t, f) = \bar{S}_{\text{spec}}(t, f) = E[S_{\text{spec}}(t, f)] \quad (20)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_{\text{spec},n}(t, f), \quad (21)$$

$$S_{\text{spec},n}(t, f) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x_n(\tau) h(t - \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right|^2, \quad (22)$$

を得る。 $E[\cdot]$ は期待値操作を表している。また、 $\tilde{\mathbf{T}}(t)$ と $\tilde{\mathbf{F}}(f)$ はテンプレートである平均スペクトログラム $\bar{S}_{\text{spec}}(t, f)$ の周辺分布であるから、

$$\tilde{\mathbf{T}}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{\text{spec}}(t', f) df dt' \quad (23)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(f) = \int_{-\infty}^f \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{\text{spec}}(t, f') dt df'. \quad (24)$$

と置き換え、さらに真の周辺分布である $\mathbf{T}(t)$ ならびに $\mathbf{F}(f)$ は

$$\mathbf{T}(t) = \int_{-\infty}^t E[|x(t')|^2] dt' = \int_{-\infty}^t \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x_n(t')|^2 dt', \quad (25)$$

$$\mathbf{F}(f) = \int_{-\infty}^f E[|X(f')|^2] df' = \int_{-\infty}^f \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |X_n(f')|^2 df', \quad (26)$$

とすればよい。

3 時間-周波数 Copula の応用

多くの生体信号、例えば脳波 (Electroencephalogram: EEG), 筋電図 (Electromyogram: EMG), あるいは心音 (Phonocardiogram: PCG) といった生体から観測される信号は非定常確率過程であると考えることができる。近年このような非定常信号を解析するために、時間-周波数解析が幅広く行われている [8]。また、時間-周波数分布の局所的な 1 次統計量である瞬時周波数などを用いた解析も行われつつあるが、2 次統計量と関連の深い瞬時帯域幅といった概念を用いて解析している例はほとんどない。これは双線形なクラスに属する時間-周波数表現が正値性を満たさない場合が多いなどの理由によるものと考えられる。筆者らはこれまでに定常確率過程に対する非常に広い範囲の帯域幅を包含するような等価帯域幅を Rényi のエントロピーを用いて統一的に表現できることを示した [9, 10]。さらにこの等価帯域幅を非定常確率過程にも適用できるように拡張した瞬時等価帯域幅を Copula に基づく正値時間-周波数分布上に定義し、心音解析にこれを応用している [11, 12]。また、音響分野で広く使われている Spectral Flatness Measure (SFM) を含むような新たな等価帯域幅 $\Lambda^{(\alpha)}$ のクラスを Burg エントロピーを用いて定義した [13]。この $\Lambda^{(\alpha)}$ も、Copula に基づく正値時間-周波数分布上に定義することで非定常確率過程に対する瞬時等価帯域幅として拡張できる。

本節では定常確率過程の等価帯域幅をまず定義し、続いて Copula に基づく正値時間-周波数分布を導入すれば、定常確率過程の等価帯域幅として定義される計量が容易に非定常確率過程に拡張できることを示す。最後に、実際の信号（脳波）解析の例も示す。

3.1 定常確率過程の等価帯域幅

3.1.1 Rényi エントロピーと等価帯域幅

$x(t)$ を定常確率過程とする。このとき $x(t)$ のパワースペクトルを $p(\lambda)$ とすると、 $x(t)$ の α 次の等価帯域幅 $W^{(\alpha)}$ は次のように定義することができる [9, 10]。

$$W^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left(\int p^\alpha(\lambda) d\lambda \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad (27)$$

但し、パワースペクトル $p(\lambda)$ は $\int p(\lambda) d\lambda = 1$ となるように正規化されているものとする。このとき、正規化パワースペクトル $p(\lambda)$ を確率密度関数とみなすならば、等価帯

域幅は Rényi のエントロピーを用いて次のように書きなおすことができる。

$$W^{(\alpha)} = e^{H^{(\alpha)}} / 2, \quad (28)$$

ここで、 $H^{(\alpha)}$ は α 次の Rényi エントロピーで、

$$H^{(\alpha)} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\int p^\alpha(\lambda) d\lambda \right) & (\alpha \geq 0 \text{ and } \alpha \neq 1), \\ - \int p(\lambda) \log p(\lambda) d\lambda & (\alpha = 1). \end{cases} \quad (29)$$

と定義される [14]。このように、確率過程の等価帯域幅が情報理論に基づいて定義されるのはある意味自然なことと言える。なぜなら、この等価帯域幅 $W^{(\alpha)}$ は、確率過程における単位時間あたりの無相関な確率変数の個数を表したものの [15]、あるいは確率過程の係数レート [16] といわれるものに等価な計量となるためである。

3.1.2 等価帯域幅と Spectral Flatness Measure

線形予測理論において、Spectral Flatness Measure: SFM といわれる計量はよく知られており非常に重要な役割を果たしている [17, 18, 19, 20, 21]。この SFM はある種の等価帯域幅であると考えることができるが、前節で定義した等価帯域幅のクラス $W^{(\alpha)}$ は SFM を包含していない。

今、 \mathbf{x} を平均 0、分散 σ_x^2 の純非決定論的な定常離散 Gauss 過程として、そのパワースペクトルは $p(\lambda)$ ($|\lambda| \leq 1/2$) であるとする。 \mathbf{x} の部分系列を $\mathbf{x}^{(N)} = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ とし、 $\varepsilon^{(N)} = \{\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(N-1)\}$ を $\varepsilon(0) = x(0)$ and $\varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ ($1 \leq k \leq N-1$) で定義されるイノベーション系列とする。但し、 $\hat{x}(k)$ は $X(k)$ の部分系列 $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ が張る部分空間 $H_{k-1}(x)$ への射影である。このとき $\mathbf{x}^{(N)}$ のグロス分散とネット分散は

$$\sigma_{\text{Gross}}^2 = N\sigma_x^2, \quad \sigma_{\text{Net}}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_\varepsilon^2(k),$$

として求めることができる。ここで、 $\sigma_\varepsilon^2(k)$ は $\varepsilon(k)$ の分散を表している。式 (30) に示される量

$$\Lambda_{\text{SFB}} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\text{Net}}^2}{\sigma_{\text{Gross}}^2} \quad (30)$$

はある種の等価帯域幅であると考えられる。これは次のような理由による。つまり、 $\mathbf{x}^{(N)}$ のネット分散とグロス分散の比、 $\sigma_{\text{Net}}^2 / \sigma_{\text{Gross}}^2$ は $\mathbf{x}^{(N)}$ における独立変数の有効数を数えたものであると考えられるためである。なお、 Λ_{SFB} は不等式 $0 \leq \Lambda_{\text{SFB}} \leq 1/2$ を満たす。

SF γ は次のように与えられる

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_\varepsilon^2(k) / \sigma_x^2, \quad (31)$$

これより、等価帯域幅 Λ_{SFB} は、乗数 $1/2$ を除いて SFM γ に等しいことが分かる。つまり、 Λ_{SFB} は

$$\Lambda_{\text{SFB}} = \gamma/2. \quad (32)$$

と書ける。

仮にいま、 $p(\lambda)$ を確率密度関数であるとするとき、Burg エントロピー J [22, 23] は

$$J = \int_{-1/2}^{1/2} \log p(\lambda) d\lambda. \quad (33)$$

として与えられる。SFM は $\gamma = e^J$ と書きなおすことができるから、 Λ_{SFB} は式 (32) から、

$$\Lambda_{\text{SFB}} = e^J / 2. \quad (34)$$

と表現することができる。

このようにして得られた新しい等価帯域幅 Λ_{SFB} は SFM と等価であり、またごく自然に定義される。しかしながら、この等価帯域幅 Λ_{SFB} は前節で定義した等価帯域幅のクラス $W^{(\alpha)}$ に含まれていない。 Λ_{SFB} を包含するような $W^{(\alpha)}$ ではないクラスが存在するはずである。

3.1.3 Λ_{SFB} を含む等価帯域幅のクラス

今、定常確率過程の正規化パワースペクトルを $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ ($|\lambda| \leq 1/2$) とする。こららのパワースペクトルを確率密度関数であると考え、Rényi の α 次情報ダイバージェンスは

$$D_\alpha(p||q) = \frac{1}{\alpha-1} \log \int_{-1/2}^{1/2} p(\lambda) \left(\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \right)^{\alpha-1} d\lambda. \quad (35)$$

で与えられる。ここで、 $q(\lambda) = w(\lambda)$ は白色雑音のパワースペクトル、つまり一様分布の確率密度関数であるとする、

$$D_\alpha(p||w) = \frac{1}{\alpha-1} \log \int_{-1/2}^{1/2} p(\lambda)^\alpha d\lambda = -H^{(\alpha)} \quad (36)$$

が成り立つ。これは $p(\lambda)$ から $w(\lambda)$ への Rényi 情報ダイバージェンスの符号を入れ替えたものである。ここで、式 (36) における $p(\lambda)$ と $w(\lambda)$ を入れ替えることで、向きを反転させた、つまり $w(\lambda)$ から $p(\lambda)$ へのネガティブ Rényi 情報ダイバージェンスが得られる。

$$\begin{aligned} D_\alpha(w||p) &= \frac{1}{\alpha-1} \log \int_{-1/2}^{1/2} w(\lambda) \left(\frac{w(\lambda)}{p(\lambda)} \right)^{\alpha-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \log \int_{-1/2}^{1/2} p(\lambda)^{1-\alpha} d\lambda = -J^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (37)$$

式 (37) において、 $\alpha \rightarrow 1$ の極限をとると、1 次のネガティブ Rényi ダイバージェンス $-D_1(w||p)$ として式 (33) の Burg エントロピー J が得られる。

したがって、式 (37) の $J^{(\alpha)}$ はある意味、一般化 Burg エントロピーと考えることができる。この $J^{(\alpha)}$ を用いることで、SFM Λ_{SFB} を含むような新しい等価帯域幅のクラスを定義することができる。式 (34) における J を $J^{(\alpha)}$ で置き換えれば、新しい等価帯域幅のクラス $\Lambda^{(\alpha)}$ を

$$\Lambda^{(\alpha)} = e^{J^{(\alpha)}} / 2. \quad (38)$$

と定義できる。

3.1.4 非定常確率過程における等価帯域幅（瞬時等価帯域幅）

非定常確率過程 $x(t)$ の正規化正值時間一周波数を $p(t, f)$ と書き表すことにする。式 (27) の類推から、等価帯域幅 $W^{(\alpha)}$ に関連する瞬時等価帯域幅 $W^{(\alpha)}(t)$ は

$$W^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2} \left(\int p^\alpha(f|t) df \right)^{1/(1-\alpha)} \quad (39)$$

と定義できる [12]。但し、条件付き確率密度関数 $p(f|t)$ は

$$p(f|t) = \frac{p(t, f)}{p(t)} \quad (40)$$

である。また $p(t)$ は時間一周波数分布 $p(t, f)$ の周辺分布であり、周辺分布条件

$$p(t) = \int p(t, f) df. \quad (41)$$

を満たすものとする。

一方、 $x(t)$ が非定常確率離散系列³の場合も、等価帯域幅 $\Lambda^{(\alpha)}$ に関連した瞬時等価帯域幅を式 (37) の類推から

$$\Lambda^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2} \left(\int_{1/2}^{1/2} p^{1-\alpha}(f|t) df \right)^{1/(\alpha-1)} \quad (42)$$

と定義することができる。

したがって、非負の値を持ち、周辺分布条件を満たす非定常確率過程 $x(t)$ の正規化正值時間-周波数分布を得ることができれば、瞬時等価帯域幅は容易に定義できる。Copula に基づく正值時間-周波数分布は、まさにこの目的に合致した分布である。

3.2 生体信号への応用例

本節では Copula に基づく正值時間-周波数分布上に定義した瞬時等価帯域幅の応用例として、眠気に抗して覚醒維持を課した状態における脳波解析例を紹介する。

従来から睡眠脳波に関する研究は盛んに行われているが、それいかに比べ眠気に抗した覚醒維持状態における脳波の解析例は見られない。これまでに我々は刻々と変化する脳波の解析方法として、瞬時等価帯域幅を導入し、眠気に抗した覚醒維持状態における脳波の状態変化を追跡した [24, 25]。瞬時等価帯域幅を用いることで、実験時における被験者の脳波の同期現象および非同期現象を中心に、その状態変化を追跡しようとするものである。以下にその脳波計測実験手順と解析結果を示す。

³ $p(t, f)$ は $|f| \leq 1/2$ に帯域制限されている。

3.2.1 脳波計測実験

健常な男女20代(学生)を被験者とし脳波計測を行った。被験者には以下に示したスケジュールにしたがって行動するよう指示した。

実験前日-当日のスケジュール

23:00-08:00 この間に7時間程度睡眠
 08:00-09:00 朝食
 09:00-12:10 授業
 12:10-13:00 昼食
 13:30-14:00 実験準備
 14:00-15:30 実験

なお、当日は体調不良や著しい疲労などが無い被験者に確認し、問題がある場合は実験を延期した。図1に実験タイムテーブルを示す。本実験前に座位開眼、閉眼安静状態の脳波を各5分間測定する。その後、座位開眼状態で読書をしてもらい眠気を誘発させる。この間覚醒維持に努めてもらい脳波計測をする。最後にもう一度座位開眼、閉眼状態の脳波を測定する。また後日、同一被験者に対し、眠気誘発時に自然入眠してもらう実験を行いコントロールデータとする。

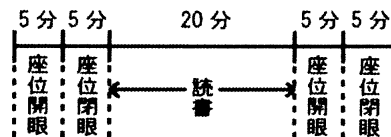


図 1: 実験タイムテーブル

3.2.2 結果

図3に、電極O1で観測された覚醒維持状態区間の、また図2に自然入眠状態区間における脳波解析例を示す。解析対象区間は実験中に撮影したビデオ映像により、眠気に逆らい覚醒維持している区間および自然入眠区間(30sec)を特定した。図2の時間-周波数分布を見ると、780秒から785秒にかけて α 帯域に脳波のエネルギー成分の集中がみられ、被験者に眠気が誘発されていることがわかる。785秒を過ぎると、 α 帯域のエネルギーが徐々に消失し、次の790秒からの区間では θ 帯域や δ 帯域にエネルギーが移行している。これは入眠時の典型的な特徴である。また、Copulaに基づく時間-周波数分布の上側にプロットされている瞬時等価帯域幅をみると、10Hz程度の大きさを示していることがわかる。これは、脳波のエネルギーが α 帯域や δ 帯域などの狭帯域に集中しており帯域はさほど広くないことを示している。

図3の時間-周波数分布を見ると、225秒付近から235秒にかけて α 波が見られ、被験者はやはり眠気が誘発されている状態であることがわかる。しかし、次の235秒から245秒の区間では、 β 帯域を含む広範囲に脳波のエネルギーが分散している。瞬時等価帯域幅は約20Hzの値を示し、脳波の帯域が広がっていることを表している。これは眠気に逆らい覚醒維持に努めるよう指示された被験者は、覚醒を維持する努力している場合に見られる特徴であり、生理学的にも大変興味深い。

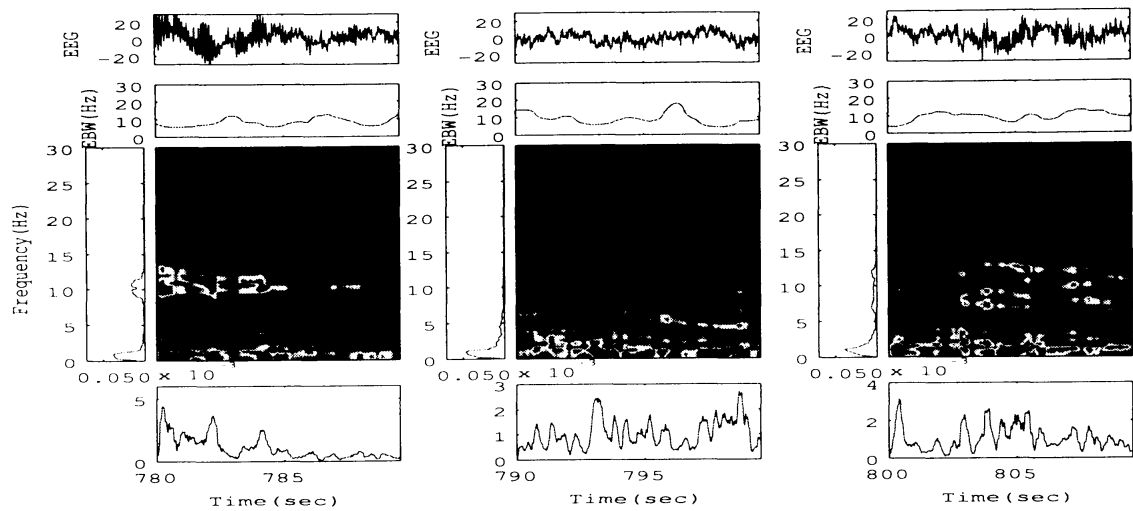


図 2: 自然入眠区間の解析例

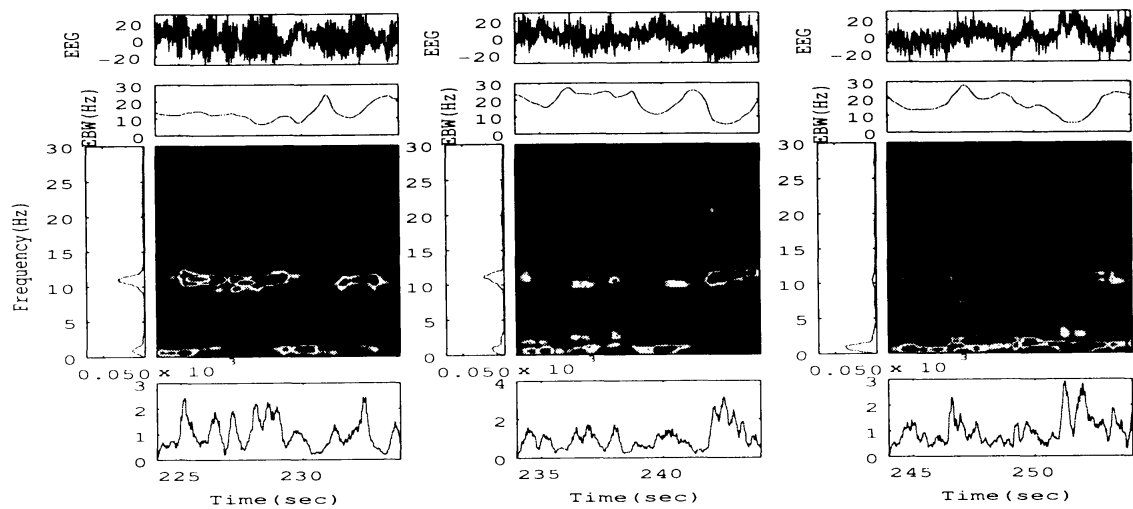


図 3: 眠気に逆らい覚醒維持の努力をしている区間の解析例

これは能動的な行動を司る前頭連合野から睡眠と覚醒を司る視床下部への活発な神経活動により、脳波に非同期現象が起きているものと推測される。

覚醒維持状態と自然入眠状態の等価帯域幅の 10 秒間の平均値を表 1 に示す。覚醒維持に努めようと努力している区間ではエネルギーが β 帯域を含む広範囲に分散しているため、等価帯域幅は 24.8Hz と大きな値を示した。一方、眠気が誘発され、脳波のエネルギーが α 帯域に集中している区間や、睡眠に移行し脳波のエネルギーが δ や θ 帯域に集中している区間の等価帯域幅は 12Hz 前後の小さい値を示した。このように、瞬時等価帯域幅を用いた解析を行うことで、眠気を感じた時に現れる α 波、そしてそれに続いて α 波が消失し、より高い周波数帯域に脳波のエネルギーが広がる現象を捉えられる。

表 1: 覚醒維持区間と自然入眠区間の帯域幅の平均値

	覚醒維持区間	自然入眠区間
等価帯域幅 (Hz)	24.8	12.0

参考文献

- [1] L. Cohen and Y. I. Zaporovanny. Positive quantum distributions. *J. Math. Phys.*, Vol. 21, No. 4, pp. 794–796, 1980.
- [2] L. Cohen and T. E. Posh. Positive time-frequency distributions. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 33, No. 1, pp. 31–38, 1985.
- [3] 遠山浩伸, 吉川昭, 小原啓義. 正值時間周波数分布の最適決定法について. 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J75-A, No. 3, pp. 661–663, 1992.
- [4] P. J. Loughlin, J. W. Pitton, and L. E. Atlas. Construction of positive time-frequency distributions. *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No. 10, pp. 2697–2705, 1994.
- [5] Manuel Davy and Arnaud Doucet. Copulas: A new insight into positive time-frequency distributions. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 10, No. 7, pp. 215–218, 2003.
- [6] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer-Verlag, 1998.
- [7] A. Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*, Vol. 8, pp. 229–231, 1959.
- [8] Metin Akay, editor. *Time Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing*. IEEE Press, 1998.
- [9] Sho Kikkawa and Hisashi Yoshida. On unification of equivalent bandwidths of a random process. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 8, pp. 670–674, 2004.
- [10] Hisashi Yoshida and Sho Kikkawa. A new class of equivalent bandwidth and its applications to bio-signals. In *ITC-CSCC*, pp. 652–655, 2001.
- [11] Hisashi Yoshida, Tadashi Ikegami, and Sho Kikkawa. Copula-based positive time-frequency distributions of the phonocardiogram. In *Proceedings of the 26th Annual International conference of the IEEE EMBS*, pp. 388–391, 2004.
- [12] Hisashi Yoshida and Sho Kikkawa. Tracking of the instantaneous bandwidth in bio-signals: the copula-based positive distribuion and generalized equivalent bandwidth. *Proceedings of SPIE*, Vol. 5559, pp. 325–334, 2004.

- [13] Hisashi Yoshida and Sho Kikkawa. Information theoretic equivalent bandwidths of random processes and their applications. *Methods of Information in Medicine*, Vol. 46, No. 2, pp. 110–116, 2007.
- [14] A. Rényi. *Probability theory*. North-Holand Publishing Company, 1970.
- [15] S. Kikkawa and M. Ishida. Number of degrees of freedom, correlation times, and equivalent bandwidths of a random process. *IEEE Trans. Inform. Theory* , Vol. 34, No. 1, pp. 151–155, 1988.
- [16] L. Lorne Campbell. Minimum coefficient rate for stationary random processes. *Information and Control* , Vol. 3, pp. 360–371, 1960.
- [17] Ping Wah Wong. Rate distortion efficiency of subband coding with cross prediction. *IEEE Trans. Information Theory* , Vol. 43, No. 1, pp. 352–356, 1997.
- [18] Thomas R. Fischer. On the rate-distortion function efficiency of subband coding. *IEEE Trans. Information Theory* , Vol. 38, No. 2, pp. 426–428, 1997.
- [19] Siew-Lian Tan and Thomas R. Fischer. Linear prediction of subband signals cross-band prediction. *IEEE Journal on Eslected Papers in Communications* , Vol. 12, No. 9, pp. 1576–1583, 1994.
- [20] Subhakar Rao and Wiliam A. Pearlman. Analysis of linear prediction, coding, and spectral estimation from subbands. *IEEE Trans. Information THeory* , Vol. 42, No. 4, pp. 1160–1178, 1996.
- [21] Bernoît Maison and Luc Vandendorp. About the asymptotic performance of multiple-input/multiple-output linear prediction of subband signals. *IEEE Signal processing Letters* , Vol. 5, No. 12, pp. 315–317, 1998.
- [22] J. P. Burg. The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra. In D. G. Childrers, editor, *Mordern spectral analysis* , pp. 130–131. 1972.
- [23] J.N. Kapur and H.K. Kesavan. *Entropy optimization principles with applications*. Academic Press, 1992.
- [24] Hisashi Yoshida, Haruka Kuramoto, Yusuke Sunada, and Sho Kikkawa. Eeg analysis in wakefulness maintenance state against sleepiness by instantaneous equivalent bandwidths. In *Proceedings of the 29th Annual International conference of the IEEE EMBS*, pp. 19–22, 2007.
- [25] 矢野朋史, 白澤早苗, 砂田祐輔, 倉本晴香, 吉田久, 吉川昭. 眠気に抗した覚醒維持状態における脳波解析—瞬時等価帯域幅による解析—. 平成 20 年電気関係学会関西支部連合大会論文集, 2007.